УДК 517.934

© **М. А. Воронецкая, А. Г. Иванов**

О СВЯЗИ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА[1]

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $|x| = \sqrt{x^*x}$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$ (звезда означает операцию транспонирования), $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с нормой $|A| \doteq \max\limits_{|x|=1} |Ax|$.

Обозначим далее через $B(\mathbb{R}, Y)$ $\big(Y$ — либо $\mathbb{R}^n$, либо $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \big)$ совокупность непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to Y$, которые почти периодичны (п. п.) в смысле Бора, и через $S(\mathbb{R}, Y)$ обозначим пространство п. п. по Степанову функций $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, Y)$ с метрикой $d(f, g) \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_t^{t+1} |f(s) - g(s)|_Y\, ds$. В $S(\mathbb{R}, Y)$ выделим подмножество $S_\infty(\mathbb{R}, Y)$, состоящее из ограниченных в существенном на $\mathbb{R}$ п. п. по Степанову функций. Напомним [1], что для каждой п. п. (как по Бору, так и по Степанову) функции f существует конечное среднее значение $M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t)\, dt$.

Далее рассмотрим пространство $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \{x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \dot{x} \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\}$ с нормой $\|x\|_{\mathfrak{B}} \doteq \|x\|_B + \|\dot{x}\|_S$, где $\|x\|_B \doteq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$, $\|\dot{x}\|_S \doteq d(\dot{x}, 0)$. Каждую функцию $f \in L_1^{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}, C(X, \mathbb{R}^n)\big)$, где X — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, представляем [2] в виде отображения $(t, x) \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$, и через $S\big(\mathbb{R}, C(X, \mathbb{R}^n)\big)$ обозначим совокупность таких функций f из $L_1^{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}, C(X, \mathbb{R}^n)\big)$, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \displaystyle\int_t^{t+1} \max_{x\in X} |f(s + \tau, x) - f(s, x)|\, ds \leqslant \varepsilon\}$ относительно плотно.

Фиксируем лагранжиан L такой, что для любых фиксированных компактных множеств X, U из $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно ($\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$) это отображение принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R})\big)$. Выделим подмножество $\mathcal{B} \doteq \{x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \overline{\mathrm{orb}}(x) \subset \mathcal{V}\}$. Для каждой функции $x \in \mathcal{B}$ отображение $t \to L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$ будет п. п. по Степанову [3], поэтому существует конечное среднее значение $M\{L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\}$.

Рассмотрим далее задачу

$$I(x) \doteq M\{L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\} \to \inf, \quad x \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

Функция $\widehat{x}$ называется решением задачи (1), если найдется такое $\gamma > 0$, что для всех $x \in \mathcal{B}$ удовлетворяющих неравенству $\|x - \widehat{x}\|_{B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} < \gamma$ верно неравенство $I(x) \geqslant I(\widehat{x})$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ *— решение задачи* (1)*. Тогда для любого отрезка* $[a, b]$ *функция* $t \to \widehat{x}(t)$ *является решением задачи*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt \to \inf, \quad x \in AC([a, b], \mathbb{R}^n) \\ x(a) = \widehat{x}(a), \quad x(b) = \widehat{x}(b) \end{cases} \tag{2}$$

($AC([a, b], \mathbb{R}^n)$ *— пространство абсолютно непрерывных на* $[a, b]$ *функций*).

Далее, пусть лагранжиан L является непрерывно дифференцируемой функцией по x и u и производные L'_x, L'_u для любых компактных множеств V и U из $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно принадлежат пространству $S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R}^n)\big)$. Для фиксированной функции

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258)

$\widehat{x} \in \mathcal{B}$ обозначим $\widehat{L}(t) \doteq L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $\widehat{L}'_x(t) \doteq L'_x\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $\widehat{L}'_u(t) \doteq L'_u\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, и $\mathcal{E}(t,x,u,v) \doteq L(t,x,v) - L(t,x,u) - (v-u)\cdot L'_u(t,x,u)$ — функция Вейерштрасса, отвечающая отображению $u \to L(t,x,u)$. Если существуют вторые частные производные функции L по переменным x и u, и для любых компактных множеств V и U из $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно эти отображения принадлежат пространству $S\Big(\mathbb{R}, C\big(V\times U, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)\Big)$, то функции $A(t) \doteq L''_{uu}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $B(t) \doteq L''_{xu}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $C(t) \doteq L''_{xx}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, принадлежат пространству $S\big(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Как и в [4] будем говорить, что система уравнений

$$-\frac{d}{dt}\big(A(t)\dot{y}(t) + B^*(t)y(t)\big) + \big(B(t)\dot{y}(t) + C(t)y(t)\big) = 0 \tag{3}$$

не имеет сопряженных точек на $\mathbb{R}$, если каждое нетривиальное (не обязательно почти периодическое) решение этой системы обращается в ноль не более одного раза на $\mathbb{R}$.

Используя классические теоремы [5], можно получить

С л е д с т в и е 1. *Пусть функция* $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ *является решением задачи* (1). *Тогда*
а) *функция* $\widehat{L}'_u$ *является п. п. по Бору, для почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *дифференцируема и*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}'_u(t) + \widehat{L}'_x(t) = 0.$$

б) *для почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *и всех* $v \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + v) \geqslant 0.$$

в) *если существует* L''_{uu}, *то для почти всех* $t \in \mathbb{R}$ *и каждом* $v \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$v^*\widehat{L}''_{uu}(t)v \geqslant 0.$$

г) *если существуют* L''_{xx}, L''_{xu}, L''_{uu}, *и для всех* $v \in \mathbb{R}^n$ *и почти всех* $t \in \mathbb{R}$ $v^*\widehat{L}''_{uu}(t)v > 0$, *то система уравнений* (3) *не имеет сопряженных точек на* $\mathbb{R}$.

Список литературы

1. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
3. Воронецкая М.А., Иванов А.Г. О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций // Деп. в ВИНИТИ 27.12.03, №1902-В2003. УдГУ, Ижевск, 2003. 32 с.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.

Воронецкая Марина Александровна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: jana-v@udmnet.ru

Иванов Александр Геннадьевич
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
imi@uni.udm.ru